L2 de MQ1

Curso de Mecânica Quântica 1 - 2010.1 - UFF - Prof. Marco Moriconi

1. A Lagrangiana que descreve uma partícula não relativística interagindo com um campo magnético é dada por
$$L = \frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{q}}{dt}\right)^2 + e\frac{d\vec{q}}{dt}\cdot\vec{A} - V(q). \tag{1}$$
Quando consideramos a integral de trajetória para este caso, temos que discretrizar o termos da ação correspondente ao potencial vetor
$$q\int_0^t d\tau\frac{d\vec{q}}{d\tau}\cdot\vec{A} = e\int_0^t d\vec{q}\cdot\vec{A}. \tag{2}$$
Uma maneira de discretizar esta última fórmula seria escrevê-la como o limite de
$$e\sum_{j=0}^{\infty}(\vec{q}_{j+1}-\vec{q}_j)\cdot\vec{A}(\vec{q}'_j). \tag{3}$$
Não é claro, porém, qual deve ser o ponto $\vec{q}_{\bar{j}}$ na expressão anterior. Poderiamos escolher $\vec{q}_{\bar{j}} = \vec{q}_j$ ou $\vec{q}_{\bar{j}} = \vec{q}_{j+1}$ ou algum ponto intermediário. A maneira de resolver esta questão é tomar um ponto qualquer entre $\vec{q}_j$ e $\vec{q}_{j+1}$ e considerar a expressão obtida pela fórmula de Feynman. Escrevendo $\psi(\vec{q}, t+\epsilon)$ e procedendo de forma semelhante ao que fizemos em sala para mostrar que a equação de Schroedinger decorre da integral de trajetória, mostre que a prescrição correta, que fornece a equação de Schroedinger de uma partícula acoplada a um campo magnético, é aquela na qual tomamos $\vec{q}'_j$o ponto médio do intervalo $\vec{q}_j$ e $\vec{q}_{j+1}$.

2. Em sala vimos que o propagador do oscilador harmônico pode ser escrito em termos da integral de trajetória, da seguinte forma:
$$K(q_1,t_1;q_2,t_2) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}S_c\right)A(t_1-t_2), \tag{4}$$
onde S_c é a ação da trajetória clássica (trajetória que satisfaz às condições de contorno) e $A(t)$ é dada por
$$A(t) = \int\mathcal{D}\eta\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[\eta]\right), \tag{5}$$
onde $S[\eta]$ é a ação do oscilador harmônico que staisfaz às seguinte condições de contorno: $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$.
   (a) Calcule ação clássica explicitamente.
   (b) Usando o resultado do item anterior e a propriedade de composição do propagador, mostre que
$$\frac{A(t_2-t_1)}{A(t_2-t)A(t-t_1)} = \sqrt{2\pi i\frac{\sin(t_2-t)\sin(t-t_1)}{\sin(t_2-t_1)}}$$

3. Sabemos que o propagador em uma dimensão pode ser escrito da seguinte forma:
$$K(q_2,t_2;q_1,t_1) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle q_2|n\rangle\langle n|q_1\rangle\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_n(t_2-t_1)\right). \tag{6}$$

Considerando a forma explícita do propagador encontrada no item anterior, e fazendo a continuação analítica $t_2 - t_1 = -i\tau$, expanda o propagador em série de potências de $\exp(-\omega\tau)$, onde ω é a frequência angular do oscialdor harmônico. Comparando as duas formulações, encontre os três primeiros estados ligados e níveis de energia do oscilador harmônico.

4. Considere uma partícula de spin 1. Encontre as representações matriciais para os operadores J_i, com $i = 1, 2, 3$.

5. A interação de quadrupolo elétrico acopla o gradiente do campo externo a um tensor de segunda ordem, construído a partir dos operadores de spin.

   (a) Escolhendo uma base apropriada, mostre que esta interação pode ser escrita como

   $$H_q = A\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}S_x^2 + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}S_y^2 + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}S_z^2\right) \tag{7}$$

   (b) Mostre que esse hamiltoniano pode ser escrito como

   $$H_q = \alpha(3S_z^2 - \mathbf{S}\cdot\mathbf{S}) + \beta(S_+^2 + S_-^2) \tag{8}$$

   onde α e β são constantes relacionadas a A, e ϕ satisfaz à equação de Laplace.

   (c) Encontre os autovalores de H_q para um sistema de spin 3/2.

6. Suoponha que duas partículas interagem por meio de um potencial que depende do spin, dado por $V(r) = V_1(r) + V_2(r)\sigma_1 \cdot \sigma_2$, onde σ_i é o operador de spin da partícula i. Mostre que a equação de Schroedinger para os estados ligados se desacopla em duas equações, uma com potencial $V_1(r) + V_2(r)$ e outra com potencial $V_1(r) - 3V_2(r)$.

7. Considere dois operadores vetoriais $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. Mostre que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ é um escalar.

8. Mostre que se um operador comuta com duas componentes do momento angular, enão ele comuta com a terceira componente.

9. Mostre que um operador vetorial em um espaço de Hilbert bidimensional tem, necessariamente, a forma $\mathbf{V} = \lambda_V \sigma$.

10. Considere a soma de três spins 1, $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_3$.

    (a) Quais os autovalores possíveis para $\mathbf{J}$? Quantos auto estados temos para cada um desses valores?

    (b) Construa o estado $\mathbf{J} = 0$ explicitamente.

11. Considere um sistema formado pela soma de um spin j_1 e um spin j_2.

    (a) Qual a dimensão do espaço de Hilbert associado a este sistema?

    (b) Quais são os possíveis autovalores de $J^2 = (J^{(1)} + J^{(2)})^2$? ($J^{(1)}$ e $J^{(2)}$ são os operadores correspondentes aos spins j_1 e j_2). Qual a dimensão dos espaços de Hilbert associados a cada um desses autovalores? Como o espaço de Hilbert do item anterior se decompõe nos espaços deste item?

(c) Escreva o estado do sistema $j_1 + j_2$ que possui o valor máximo $m_>$ de J_z. Usando o operador de escada apropriado, encontre o estado correspondente ao autovalor $m_> - 1$ de J_z.

(d) Escreva um estado arbitrário com $m = m_> - 1$ a partir dos estados $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$. Imponha a condição de ortogonalidade deste estado a estados do item anterior, o que, junto com a condição de normalização, fixa estes coeficientes. Aliás, por que este estado tem que ser ortogonal aos estados do item anterior?

12. Partindo de $K(x,t;y,t') = \theta(t-t')\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(x)\psi_n^*(y)\exp(-iE_n(t-t')/\hbar)$, mostre que o propagador satisfaz à $K(x,t;y,t) = \delta(x-y)$ e à equação de Schroedinger não-homogênea

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}K = HK + \delta(t-t')\delta(x-y). \tag{9}$$

Mostre a propriedade de composição

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a) = \int K(x_b,t_b;y,t)K(y,t;x_a,t_a)dy, \qquad \text{para} \qquad t_a < t < t_b. \tag{10}$$

13. Considere um oscilador harmônico forçado, cuja lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + f(t)x. \tag{11}$$

(a) Encontre a equação clássica de movimento para este sistema. Chame a solução desta equação, que satisfaz à $x(0) = x_a$ e $x(t) = x_b$, de $x_{cl}(t)$.

(b) Escreva $x = x_{cl} + \eta$. Qual a condição de contorno para η? Mostre que a ação pode ser escrita como

$$S = S_{cl} + \int_0^t \frac{1}{2}m\dot{\eta}^2 - \frac{1}{2}k\eta^2 dt \tag{12}$$

(c) Mostre que o propagador do oscilador harmônico forçado é dado por

$$K(x_b,t;x_a,0) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}S_{cl}\right)K_{OH}(0,t;0,0) \tag{13}$$

onde K_{OH} é o propagador do oscilador harmônico não forçado.

14. Considere o propagador de uma partícula livre em uma dimensão:

$$K(x,t;y,0) = \theta(t)\left(\frac{m}{2\pi i\hbar t}\right)^{1/2}\exp\left(i\frac{m(x-y)^2}{2\hbar t}\right) \tag{14}$$

Uma partícula se encontra inicialmente em um estado descrito por um pacote gaussiano,

$$\psi(x,0) = \exp(ip_0x/\hbar)\frac{\exp(-x^2/2\Delta^2)}{(\pi\Delta^2)^{1/4}}. \tag{15}$$

Calcule a função de onda para um $t > 0$ qualquer. Como a largura deste pacote depende do tempo?